ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ ARASINAV SORULARI

1) Eşlenik ve modül özelliklerini kullanarak $\left|\left(2\bar{z}+5\right)\left(\sqrt{2}-i\right)\right|=\sqrt{3}\left|2z+5\right|$ olduğunu gösteriniz. $A=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|2\bar{z}+i\right|=4\right\}$ kümesini belirtip çiziniz.

2) $|z|<1$ ise $\left|\dfrac{z^{2n}}{2+z^{n}+z^{5n}}\right|\leq\dfrac{|z|^{2n}}{2\left(1-|z|\right)}$ olduğunu gösteriniz.

3) $z_1=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$, $z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)^{6}$ ise $Arg\left(z_1\right)$ ve $Arg\left(z_2\right)$ değerlerini bulunuz.

4) $\cos z=0$ denklemini çözünüz.

$$z_1, z_2\in\mathbb{C},\ \sin z_1=\sin z_2\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=z_2+2k\pi, & k\in\mathbb{Z}\\ z_1+z_2=(2k+1)\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

5) $f(z)=Arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $g(z)=\dfrac{z}{z+\bar{z}}$ olsun. f, g, $f+g$ ve $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

6) $z^{5}=-1$ denklemini çözünüz.

7) $A=\left\{z\in\mathbb{C}:\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}\right\}$ kümesini çizerek içini, yığılma noktaları kümesini, sınırını bulunuz. Ayrica bu küme bir bölge midir?

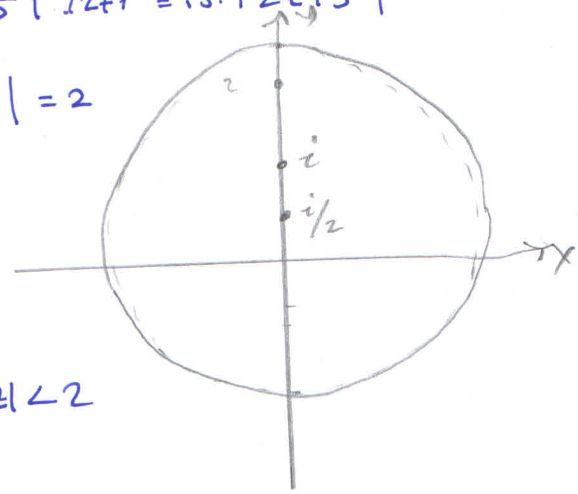
8) $\arctan\left(\dfrac{\pi}{4}i\right)$ ve $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+i\right)$ değerlerini hesaplayınız.

Not: Sınav **25.04.2021** Pazar günü **09:00-11:00** arasında gerçekleşecektir. Süre 120 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

MAT 314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ Quiz ÇÖZÜMLER

(1) $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = |2\bar{z}+5||\sqrt{2}-i| = |\overline{2z+5}|\sqrt{2+1} = \sqrt{3}\cdot|2z+5|$



$|2\bar{z}+i| = 4 \Rightarrow 2\cdot\left|\bar{z}+\frac{i}{2}\right| = 4 \Rightarrow \left|z-\frac{i}{2}\right| = 2$

merkezi $i/2$ de olan, yarı çapı $=2$ çember.

(2) $|z|<1 \Rightarrow |z^n+z^{5n}| \leq |z|^n+|z|^{5n} < 2\cdot|z| < 2$

$|2+z^n+z^{5n}| \geq \big|2-|z^n+z^{5n}|\big|$,

$\Rightarrow \big|2-|z^n+z^{5n}|\big| = 2-|z^n+z^{5n}| \geq 2-2|z| = 2(1-|z|)$

$\Rightarrow \left|\dfrac{z^{2n}}{2+z^n+z^{5n}}\right| = \dfrac{|z|^{2n}}{|2+z^n+z^{5n}|} \leq \dfrac{|z|^{2n}}{2(1-|z|)}$ bulunur.

(3) $z_1 = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$, $z_2 = (\sqrt{3}-i)^6 \Rightarrow$

$\arg z_1 = \arg(-2) - \arg(1+\sqrt{3}i)$, $\operatorname{Arg}(-2) = \pi$, $\operatorname{Arg}(1+\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$ old.

$\arg z_1$ in değerlerinden biri $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ dır. $\Rightarrow \boxed{\operatorname{Arg} z_1 = \frac{2\pi}{3}}$

$\arg z_2 = \arg(\sqrt{3}-i)^6 = 6\cdot\arg(\sqrt{3}-i)$, $|\sqrt{3}-i| = 2$, $\left.\begin{matrix}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = -1/2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = -\pi/6$

$\arg z_2$ nin değerlerinden biri $6\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\pi$ dır.

Böylece esas değer $\operatorname{Arg} z_2 = -\pi+2\pi = \pi$ dır.

(4) $\cos z = 0 \Rightarrow \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = 0 \Rightarrow \cos x\cosh y = 0$ ve $\sin x\sinh y = 0$

$\cosh y$ nin reel kökü olmadığından $\cos x = 0$ olur. $\Rightarrow \sin x = \mp 1$ dir.

Bu ikinci denklemde yerine yazılırsa $\sinh y = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $y = 0$ olur.

$\sin z_1 - \sin z_2 = 2\cdot\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) \Rightarrow$

$$\sin z_1 = \sin z_2 \iff \begin{cases} \dfrac{z_1+z_2}{2} \in \dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} & \text{veya} \\[2ex] \dfrac{z_1-z_2}{2} \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

5) $f(z)=Arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $g(z)=\frac{z}{z+\bar{z}}$

$D_f=\mathbb{C}-\{0\}$, $D_g=\{z\in\mathbb{C}: z+\bar{z}\neq 0\}$, $z+\bar{z}=0 \Rightarrow x=0$,

$D_g=\{z\in\mathbb{C}: z=x+iy,\ x\neq 0\}=\{(x,y): x\neq 0\}$

g fonksiyonu sanal eksenin dışında tanımlı.

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=D_g$, $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{z\in\mathbb{C}: g(z)=0\}=D_g$.

6) $z^5=-1$, $w=-1$ olsun. $|w|=1$, $\cos\theta=-1$, $\sin\theta=0$, $\theta=\pi$

$z_k=|w|^{1/5}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{5}\right)\right]$, $k=0,1,2,3,4$

$=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)$, $k=0,1,2,3,4$

$z_0=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}=e^{i\pi/5}$

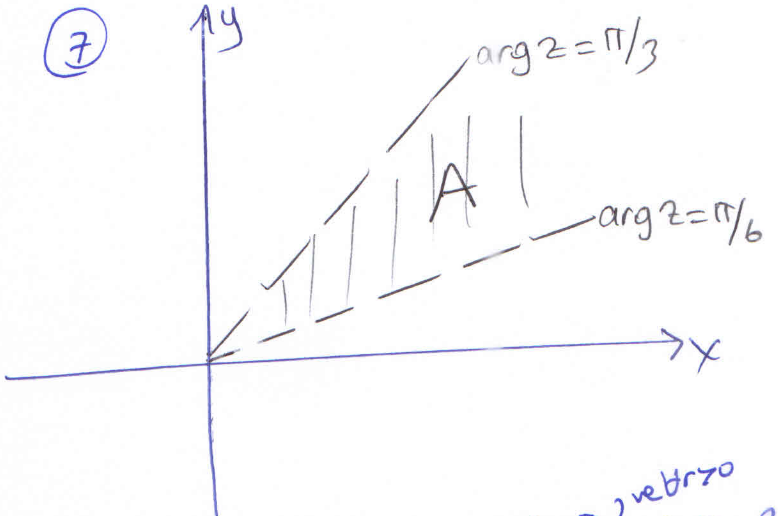
$z_1=\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}=e^{i3\pi/5}$

$z_2=\cos\frac{5\pi}{5}+i\sin\frac{5\pi}{5}=e^{i5\pi/5}$

$z_3=\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}=e^{i7\pi/5}$

$z_4=\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}=e^{i9\pi/5}$

7)



$A=\{z: \frac{\pi}{6}<\arg z<\pi/3\}$

- $\forall z\in A$ için $B(z,r)\subset A$ o.ş. $r>0$ var.

$\Rightarrow A^o=\{z: \frac{\pi}{6}<\arg z<\pi/3\}$

- $\forall z\in\{z: \frac{\pi}{6}\leq\arg z\leq\frac{\pi}{3}\}$ için

$(B(z,r)-\{z\})\cap A\neq\phi$, $\forall r>0$

olduğundan

$A'=\{z: \frac{\pi}{6}\leq\arg z\leq\frac{\pi}{3}\}$

- $\forall z\in\{z: \arg z=\frac{\pi}{3},\ \arg z=\frac{\pi}{6}\}$ ve $\forall r>0$ için $B(z,r)\cap A\neq\phi$ ve $B(z,r)\cap(\mathbb{C}-A)\neq\phi$

olduğundan $\partial A=\{z: \arg z=\frac{\pi}{3},\ \arg z=\frac{\pi}{6}\}$ dır.

$A=A^o$ olduğundan A açıktır. Ayrıca A daki herhangi iki noktayı birleştiren eğri yine A da kaldığından A eğrisel bağlantılı olup, dolayısıyla bağlantılıdır. A açık ve bağlantılı olduğundan bölgedir.

8-) $\arctan\left(\frac{\pi}{4} i\right) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+i\cdot\frac{\pi}{4}i}{1-i\frac{\pi}{4}i}\right)$

$$= \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1-\frac{\pi}{4}}{1+\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \log \frac{4-\pi}{4+\pi}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\ln\left|\frac{4-\pi}{4+\pi}\right| + i \arg\left(\frac{4-\pi}{4+\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\ln \frac{4-\pi}{4+\pi} + i\,(0+2k\pi)\right) \quad , k\in \mathbb{Z}$$

$$= k\pi - \frac{i}{2} \ln \frac{4-\pi}{4+\pi} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\right) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{3}+i)} + e^{-i(\frac{\pi}{3}+i)}}{2}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}-1} + e^{-i\frac{\pi}{3}+1}}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) + e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + e\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{e+e^{-1}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\, i\left(e^{-1}-e\right)$$